# Properties of a Positive Reciprocal Matrix and Their Application to Estimating Priority Weights for Incomplete Comparison Matrices (Decision Theory and Its Related Fields)



Shiraishi, Shunsuke; Obata, Tsuneshi; Daigo, Motomasa; Nakajima, Nobuyuki

数理解析研究所講究録
1043 巻 1998 年 135-142



# Properties of a Positive Reciprocal Matrix and Their Application to Estimating Priority Weights for Incomplete Comparison Matrices

SHIRAISHI Shunsuke, Toyama University
OBATA Tsuneshi, Oita University
DAIGO Motomasa, Toyama University
NAKAJIMA Nobuyuki, Toyama University

*Abstract* The characteristic polynomial of a positive reciprocal matrix has some noteworthy properties. They are deeply related to the notion of consistency of a pairwise comparison matrix of AHP. Based on the results, we propose a method for estimating a missing entry of an incomplete pairwise comparison matrix.

## 1 Introduction

In AHP(Analytic Hierarchy Process), positive reciprocal matrices appear as pairwise comparison matrices [1, 5, 6, 7, 11]. It is a main ingredient which supports analytical feature of AHP. Based on the pairwise comparison matrix obtained by oral questioning, AHP estimates a priority vector of factors involved. By Saaty's eigenvector method, one computes the priority vector. However it is a hard task to solve the eigensystem exactly, because it requires solving an algebraic equation of high degree. Since the eigenvector method requires only the principal eigenvector (Perron-Frobenius vector) of the matrix, one practically use the power method in general [11]. By the recent development of high-performance computer environment, any decision maker can use the eigenvector method easily. On the other hand, attentions to the characteristic polynomial of the pairwise comparison matrix seem to have been paid little. It seems that the existence of the power method has been limiting the investigation of the characteristic polynomial. If one examines the characteristic polynomial in detail, one see that it is deeply related to the notion of consistency of the pairwise comparison matrix. In this paper, we shed a light on this relationship.

The eigenvector method also yields a measure for inconsistency. The degree of inconsistency is measured by the principal eigenvalue $\lambda_{\max}$. If $A$ is a pairwise comparison matrix of the size $n$, it is known that $\lambda_{\max} \geq n$ and $A$ is consistent if and only if $\lambda_{\max} = n$ [11]. Hence one sees the consistency by the quantity $\lambda_{\max} - n$. Normalizing by the size of the matrix, the consistency index (C.I.) is defined by

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}.$$

Decision makers are required to do a pairwise comparison so that C.I. would not be as far from 0 as possible. In Section 2, we show that it is completely determined by the coefficient of the degree $n-3$ of the characteristic polynomial whether C.I. $= 0$ or not. Based on this fact, in Section 3, we propose a new method for estimating a missing datum of an incomplete pairwise comparison matrix.

When the pairwise comparison matrix has a missing entry, it is an important subject to estimate a priority vector from the incomplete matrix. Several methods have been proposed for this subject (see [2, 10] and references therein). It seems that, in principle, any of such method aims to make C.I. good. We would also like to aim to minimize C.I. However it is not an easy matter to minimize C.I. exactly. Instead of minimizing C.I., we propose a heuristic method which is expected to make the value of C.I. good. We also compare this method with Harker's method [2] by a computational experiment.

## 2 正値逆数行列の固有多項式

この節では正値逆数行列の固有多項式についての性質を述べる.

まず, 定義からはじめよう.

**定義 1** $A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 実数値行列とする. $A$ が逆数行列 (reciprocal matrix) であるとは, すべての $i,j=1,\dots,n$ に対して $a_{ij}=1/a_{ji}$ が成り立つことをいう.

したがって, 正値逆数行列は一般に次のような形をしている.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

AHP で現れる一対比較行列は正値逆数行列である.

**定義 2** $A=(a_{ij})$ を $n\times n$ 正値逆数行列とする. $A$ が整合的である (consistent) とは, すべての $i,j,k=1,\dots,n$ に対して $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$ が成り立つことをいう.

行列 $A$ を $n\times n$ 正値逆数行列とし, $A$ の固有多項式を

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda E-A) \\ &= c_0\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n \end{aligned}$$

と表す ($E$ は単位行列). 一般に $c_0=1$, $c_1=-\mathrm{trace}A$, $c_n=(-1)^n\det A$ であり, 特に $A$ が正値逆数行列のときはさらに $c_1=-\mathrm{trace}A=-n$ となる.

**命題 1** 行列 $A$ を $n\times n$ 正値逆数行列とする. このとき $A$ が整合的であることと

$$P_A(\lambda)=\lambda^n-n\lambda^{n-1}$$

が成り立つこととが同値である.

これより $A$ の整合性が崩れるのは, $P_A(\lambda)$ に $n-2$ 次以降の「余分な」項がくっついている場合, だといえる. そこで, この「余分な」項をより詳しく見てみよう.

そのためには, 固有多項式の係数を反復的に計算するための手法であるフレーム法 [3] を利用する.

[フレーム法]

$n$ 次正方行列 $A$ の固有多項式の係数 $c_k$, $k=0,\dots,n$ は次のように計算される.

**Step 1** $c_0=1$, $A_0=E$, $k=1$ とおく.

**Step 2**

$$c_k = -\frac{\mathrm{trace} AA_{k-1}}{k},$$
$$A_k = AA_{k-1} + c_k E$$

を計算する.

**Step 3** $k=n$ なら終了, そうでなければ $k=k+1$ とおき Step 2 へ.

フレーム法を用いることにより, $P_A(\lambda)$ の $n-2$ 次の係数 $c_2$ と $n-3$ 次の係数 $c_3$ とが以下のように計算される.

**命題 2** $A$ が正値逆数行列ならば $c_2=0$.

**命題 3** $n \geq 3$, $A$ が $n\times n$ 正値逆数行列ならば,

$$\begin{aligned} c_3 &= 2\binom{n}{3} - \sum_{i<j<k}\left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right) \\ &= \sum_{i<j<k}\left\{2-\left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

**系 1** $n \geq 3$, $A$ が $n\times n$ 正値逆数行列ならば, $c_3 \leq 0$.

$A$ の整合性を判断するには, 実は $c_3$ だけを見ればよい.

**定理 1** $n \geq 3$, $A$ が $n\times n$ 正値逆数行列のとき, $A$ が整合的であることと, $c_3=0$ となることとが同値である.

証明: 命題 3 (1) より, $A$ が整合的であれば $c_3=0$ となることがわかる.

逆に $c_3=0$ を仮定する. 相加平均相乗平均の関係から,

$$\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} \geq 2$$

なので, $c_3=0$ より

$$\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} = 2, \qquad \text{for all} \quad i<j<k$$

でなければならない. ところがこれが成り立つのは

$$\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}, \qquad \text{for all} \quad i<j<k$$

の場合に限られる. したがって,

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \qquad \text{for all} \quad i<j<k.$$

この関係から, 行列 $A$ が整合的であることが容易に導かれる. □

# 3 不完全一対比較行列の重要度ウェイトの評価法

この節では, 前節での結果を利用して, 不完全一対比較行列のウェイトの評価法を新たに提案するとともに, 既存の評価法である Harker 法を紹介し, ある条件のもとで両者が同じ結果をもたらすことを示す.

不完全一対比較行列の欠損が $m$ 箇所 (対称部分をあわせると $2m$ 箇所) あるとする. それらの欠損箇所に変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ を補った行列を $A(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ と表す.

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & x_1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 1/x_1 & & \ddots & & x_2 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1/x_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

## 3.1 我々の提案する手法

この行列 $A(x)$ の最大固有値 $\lambda_{\max}(x)$ に関する最小化問題:

$$\min_x \lambda_{\max}(x) \tag{2}$$

の解を見つけたいのだが, これはそう簡単なことではない. そこで, $A(x)$ の固有多項式の $n-3$ 次の係数に注目する. これを $c_3(x)$ とおくと, 定理 1 より, $c_3(x) = 0$ が成り立つことと $A(x)$ が整合的であること (これは $\lambda_{\max}(x) = n$ とも同値) が同値であることがわかる. また 系 1 より $c_3(x) \leq 0$ である. したがって $\lambda_{\max}(x)$ を小さくして $n$ に近づける代わりに $c_3(x)$ を大きくして 0 に近づけても, 同じように整合性がよくなるのではないかと期待される.

以上より, 我々は以下のようなヒューリスティックな手法を提案する.

**[Proposal method]**

**Step 1** 最適化問題:

$$\max_x \; c_3(x) \tag{3}$$

の解 $x^*$ を見つける.

**Step 2** $A(x^*)$ の最大固有値に対応する固有ベクトルを求める.

**Step 3** 求めた固有ベクトルを正規化したものを重要度ウェイトと定める.

欠損箇所が 1 箇所 ($(i,j)$-成分が欠損) の場合, 命題 3 より, 最適化問題 (3) は

$$\min_x \sum_{k \neq i,j} a_{ik} a_{kj} \frac{1}{x} + \sum_{k \neq i,j} \frac{1}{a_{ik} a_{kj}} x \tag{4}$$

と等価であることがわかる. この問題の解 $x^*$ は簡単に求めることができ,

$$x^* = \sqrt{(\sum_{k\neq i,j} a_{ik}a_{kj})/(\sum_{k\neq i,j} \frac{1}{a_{ik}a_{kj}})} \tag{5}$$

となる.

欠損箇所が複数の場合には次の二つのケースに分けられる.

欠損しているのが $(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_m,j_m)$ の各成分だとすると, それらが互いに同一行, 同一列に重なっていなければ, (3) の解 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_m^*)$ は

$$\begin{aligned} x_1^* &= \sqrt{(\sum_{k\neq i_1,j_1} a_{i_1k}a_{kj_1})/(\sum_{k\neq i_1,j_1} \frac{1}{a_{i_1k}a_{kj_1}})} \\ x_2^* &= \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

と表される.

欠損が同一行, 同一列に重なっている場合には (3) の解はこのような形には書けず, 数値解析的な手法を用いる必要がある.

## 3.2 Harker 法

Harker 法は不完全な一対比較行列の重要度ウェイトの評価のために, Harker によって提案された手法である [2]. 彼の手法は次のようなアイデアに基づく. 行列の $(i,j)$-成分が欠損している場合, そこに人工的に $w_i/w_j$ をあてはめ, 欠損のない逆数行列 $A(w)$ を作る. この行列について固有値問題

$$A(w)\cdot w = \lambda w \tag{6}$$

を考える.

たとえば不完全な一対比較行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \square \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \square & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

($\square$ が欠損データ) に対しては

$$A(w)\cdot w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

を考えることになる. ところがこれは

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくことにより, $\tilde{A}w$ に一致する. したがって (6) のかわりに, $\tilde{A}$ に関する固有値問題

$$\tilde{A}w = \lambda w$$

を解けばよい.

一般には $\tilde{A} = (a_{ij})$ は以下のように定めればよい.

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1 + m_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j \text{ かつ } (i,j) \text{ 成分が欠損}, \\ a_{ij}, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

ただし $m_i$ は第 $i$ 行中の欠損データの個数を表す.

[Harker 法]

**Step 1** 欠損を含む行列 $A$ から $\tilde{A}$ を作成.

**Step 2** $\tilde{A}$ の最大固有値に対する固有ベクトルを求める.

**Step 3** 求めた固有ベクトルを正規化したものを重要度ウェイトと定める.

## 4 両手法の比較

我々は Harker 法と我々の手法との比較を行いたいが, そのためには $\tilde{A}$ の最大固有値 $\tilde{\lambda}_{\max}$ と $A(x^*)$ の最大固有値 $\lambda_{\max}(x^*)$ とを比較するのが妥当であろう.

この節では特に欠損が 1 箇所 ($(1,n)$-成分が欠損していると考えて一般性を失わない) の場合について調べた結果を述べる.

ある程度の整合性があれば, これらの手法から得られる結果が一致する.

**定理 2** $(1,n)$-成分だけが欠損した行列 $A$ に対して,

$$a_{1j}a_{jn} = a_{1k}a_{kn}, \qquad \textit{for all} \quad j,k = 2,\ldots,n-1,$$

が成り立てば, 両手法の結果が一致する.

さらに, 一般のケースにおいて, 我々の手法と Harker 法とを比較するため次のような実験を行った.

**[実験]**

**Step 1** $a_{1n}$ を除く $a_{ij}, \quad i < j$ として, $1,\ldots,9$ とその逆数をランダムに発生させ, 不完全一対比較行列を生成する.

**Step 2** 我々の手法による最大固有値 $\lambda_{\max}(x^*)$ と Harker 法による最大固有値 $\tilde{\lambda}_{\max}$ を計算する.

**Step 3** $\lambda_{\max}(x^*)$ と $\tilde{\lambda}_{\max}$ を比較し, どちらが小さいかを判定する.

この実験を $n = 4, 5, \ldots, 12$ のそれぞれについて 10,000 回繰り返し得られた結果が表 1 である. 最大固有値の計算にはべき乗法を用いた. べき乗法の実装については [9, 11] を参照し, 実験のプログラムは GNU C を用いて作成した.

表 1: 実験結果

| $n$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| # of win | 9,923 | 7,724 | 6,754 | 6,075 | 5,647 |
| $n$ | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| # of win | 5,394 | 5,200 | 5,083 | 5,178 | |

表中の '# of win' は, $\lambda_{\max}(x^*) < \tilde{\lambda}_{\max}$ が成り立った回数, すなわち我々の手法が Harker 法よりも優れていた回数を意味する.

この結果より, 我々の手法がおおむね優れているといえる. 特に $n$ が小さいときほど我々の手法の優位が増す傾向がみられる.

## 5 おわりに

今回行った実験で, 我々の手法がおおむね良好な結果をもたらすことがわかった. ただ, この実験では擬似的な不完全一対比較行列を完全にランダムに生成しているため, とんでもなく不整合なものが多く含まれると考えられる. そこで我々の手法で評価したあとの整合度の分布を調べたところ $n$ が大きくなるにつれ比較的整合的なケースがほとんど生じていなかった. しかし実際に人間が作成する一対比較行列は, ある程度は整合的であると推測される. そのため, 実用上重要なのは, とんでもなく不整合な場合における性能ではなく, ある程度整合的な場合における性能であろう. 我々はこの点に関する評価を行うため, 新たな実験を計画している.

また, 欠損データが複数ある場合についても同様の実験を行いたいと考えている.

## 参考文献


[1] B. L. Golden, E. A. Wasil and P. T. Harker (Eds.): *The Analytic Hierarchy Process*, (Springer Verlag, 1989).

[2] P. T. Harker: Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process, *Mathl. Modelling*, **9** (1987) 353–360.

[3] 伊理 正夫: 線形代数 II, (岩波書店, 1994).

[4] 小畑 経史, 白石 俊輔: WWW による一対比較行列の重要度計算システム, 大分大学工学部研究報告, **35** (1997) 49–54.
`http://impala.csis.oita-u.ac.jp/AHP/SimpleSystem/estimating_priorities.pdf`

[5] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, (McGraw-Hill, 1981).

[6] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process Series I*, (RWS publication, 1990).

[7] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process Series VI*, (RWS publication, 1994).

[8] S. Shiraishi, T. Obata and M. Daigo: Properties of a Positive Reciprocal Matrix and Their Application to AHP, *Working Paper No. 168, Faculty of Economics, Toyama University*, (1997). `http://160.26.91.59/AHP/SimpleSystem/reciprocal.ps`

[9] 鈴木 誠道, 飯田 善久, 石塚 陽: C による数値計算法, (オーム社, 1997).

[10] E. Takeda and P. L. Yu: Assessing Priority Weights from Subsets of Pairwise Comparisons in Multiple criteria Optimization Problems, *European J. Oper. Res.*, **86** (1995) 315–331.

[11] 刀根 薫: ゲーム感覚意思決定法, (日科技連, 1986).